曲面上のディラック分布

令和 3 年 2 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ユークリッド空間に於ける超曲面上に台を持つ**ディラックのデルタ分布** Dirac delta distribution を原点に於けるディラック分布の沈め込み写像による引き戻しとして捉え、その積分表示を与える。波動方程式の基本解の計算等の応用例も説明する。

1　沈め込み写像の水準集合としての超曲面

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された C^∞-函数 $F : U \to \mathbb{R}$ は**沈め込み** submersion（即ち任意の $x \in U$ に対し線型写像 $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は全射）であるとする。f の**勾配** gradient of f は各 $x \in U$ に対し

$$(\mathrm{grad} f)(x) \cdot \xi = f'(x)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

によって一意的に定まる勾配ベクトル $(\nabla f)(x) = (\mathrm{grad} f)(x)$ によって連続写像 $\mathrm{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$ として定まる。各 $x \in U$ に対し $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は線型全射なので

$$\dim \mathrm{Ker} f'(x) = n - \dim \mathrm{Im} f'(x) = n - 1$$

であり任意の $x \in U$ に対し $\nabla f(x) \neq 0$ となる。各 $s \in \mathbb{R}$ に対する f の**水準集合** level set は

$$f^{-1}(\{s\}) := \{x \in U;\ f(x) = s\}$$

で定義される。これは互いに交わらない二つの開集合

$$f^{-1}((-\infty, s)) := \{x \in U;\ f(x) < s\},$$
$$f^{-1}((s, +\infty)) := \{x \in U;\ f(x) > s\}$$

の境界

$$f^{-1}(\{s\}) = \partial\left(f^{-1}((-\infty, s))\right) = \partial\left(f^{-1}((s, +\infty))\right)$$

であり C^1 級の $(n-1)$ 次元部分多様体として超曲面を成す。二つの開集合 $f^{-1}((-\infty, s))$, $f^{-1}((s, +\infty))$ は境界 $f^{-1}(\{s\})$ の片側に在る。各 $x \in f^{-1}(\{s\})$ に於ける接空間 $T_x f^{-1}(\{s\})$ は $\nabla f(x)$ と直交し、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は $(n-1)$ 次元部分空間 $T_x f^{-1}(\{s\})$ と 1 次元部分空間 $\mathrm{Span} \nabla f(x)$ とに直交分解される：

$$\mathbb{R}^n = T_x f^{-1}(\{s\}) \oplus \mathrm{Span} \nabla f(x), \quad x \in f^{-1}(\{s\})$$

従って $\nabla f(x)/|\nabla f(x)| \in \mathbb{R}^n$ は $\partial\left(f^{-1}((-\infty,s))\right)$ の**外向き単位法ベクトル** outward unit normal vector であり $\partial\left(f^{-1}((s,+\infty))\right)$ の**内向き単位法ベクトル** inward unit normal vector となる。$f^{-1}(\{s\})$ の**体積形式** volume form $\sigma_{f^{-1}(\{s\})}$ を

$$\sigma_{f^{-1}(\{s\})} := \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial_j f}{|\nabla f|}dx_1\wedge\cdots\overset{j}{\vee}\cdots\wedge dx_n$$

で定める。単位法ベクトルを係数とする 1 形式

$$\frac{1}{|\nabla f|}df = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial_j f}{|\nabla f|}dx_j$$

は $(n-1)$-形式 $\sigma_{f^{-1}(\{s\})}$ との外積により、また同じ事であるが 1 形式

$$df = \sum_{j=1}^{n}\partial_j f dx_j$$

は $(n-1)$-形式

$$\omega_{f^{-1}(\{s\})} := \frac{1}{|\nabla f|}\sigma_{f^{-1}(\{s\})}$$

との外積により $\mathbb{R}^n$ の体積形式を成す：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|\nabla f|}df\right)\wedge\sigma_{f^{-1}(\{s\})} &= df\wedge\omega_{f^{-1}(\{s\})} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j f dx_j\right)\wedge\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\partial_k f}{|\nabla f|^2}dx_1\wedge\cdots\overset{k}{\vee}\cdots\wedge dx_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\partial_j f\partial_k f}{|\nabla f|^2}dx_j\wedge\left(dx_1\wedge\cdots\overset{k}{\vee}\cdots\wedge dx_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial_j f\partial_j f}{|\nabla f|^2}dx_j\wedge\left(dx_1\wedge\cdots\overset{j}{\vee}\cdots\wedge dx_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(\partial_j f)^2}{|\nabla f|^2}dx_1\wedge\cdots\cdots\wedge dx_n = dx_1\wedge\cdots\cdots\wedge dx_n
\end{aligned}$$

また**ガウスの発散定理** Gauss Divergence Theorem は

$$\int_{f^{-1}(\{s\})}\varphi\frac{\partial_j f}{|\nabla f|}\sigma_{f^{-1}(\{s\})} = \int_{f^{-1}((-\infty,s))}\partial_j\varphi = -\int_{f^{-1}((s,+\infty))}\partial_j\varphi,\ \varphi\in C_0^\infty(U;\mathbb{C})$$

と表される。

2　超曲面上のディラック分布

沈め込み写像 $f : U \to \mathbb{R}$ の水準集合 $f^{-1}(\{0\})$ 上のディラック分布を原点に於けるデルタ分布 $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ の引き戻し $f^*\delta$ として捉えよう。初めに、ヘビサイド函数 $H \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$

との関係 $H' = \delta$ を基礎に置いて考える。$s \in \mathbb{R}$ による並進作用素を τ_s とする。具体的には $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して $(\tau_s\varphi)(t) = \varphi(t-s),\ t \in \mathbb{R}$ とし、$u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ に対する並進 $\tau_s u$ はその転置

$$\langle \tau_s u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-s}\varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

で定義する。$\mathbb{R}$ 上の函数としての H に対しては各点毎の定義により $\tau_s H$ が定まり分布としての $H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ には転置により $\tau_s H$ が定まる。従って

$$\begin{aligned}
\langle (\tau_s H)', \varphi \rangle &= -\langle \tau_s H, \varphi \rangle = -\langle H, \tau_{-s}\varphi' \rangle = -\langle H, (\tau_{-s}\varphi)' \rangle \\
&= \langle \delta, \tau_{-s}\varphi \rangle = \langle \tau_s \delta, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

より $(\tau_s H)' = \tau_s \delta$ を得る。$0 \le \rho \le 1,\ \mathrm{supp}\rho \subset [-1,1],\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ なる $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を一つ取り $\varepsilon > 0$ に対し $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big), \quad t \in \mathbb{R}$$

で定める。このとき $\rho_\varepsilon * (\tau_s H) \in (C^\infty \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ であり、任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対し

$$\begin{aligned}
\langle f^*(\rho_\varepsilon * (\tau_s H)), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_\varepsilon * (\tau_s H))(f(x))\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{-\infty}^{f(x)} (\rho_\varepsilon * (\tau_s H))'(t)dt \Big) \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_\varepsilon * (\tau_s H))'(t) \Big(\int_{f^{-1}((t,+\infty))} \varphi(x)dx \Big) dt \\
&= \langle (\rho_\varepsilon * (\tau_s H))', \int_{f^{-1}((\cdot,+\infty))} \varphi \rangle \\
&= \langle \rho_\varepsilon * (\tau_s \delta), \int_{f^{-1}((\cdot,+\infty))} \varphi \rangle
\end{aligned}$$

が成立する。左辺はルベーグの収束定理を

$$\begin{aligned}
|f^*(\rho_\varepsilon * (\tau_s H))\varphi| &= |(\rho_\varepsilon * (\tau_s H)) \circ f|\,|\varphi| \\
&\le \|\rho_\varepsilon * (\tau_s H)\|_\infty |\varphi| \le |\varphi|
\end{aligned}$$

に用いると $\varepsilon \downarrow 0$ なるとき

$$\langle f^*(\rho_\varepsilon * (\tau_s H)),\ \varphi \rangle \to \langle f^*(\tau_s H),\ \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_s H)(f(x))\varphi(x)dx$$

に収束し、右辺は

$$\begin{aligned}
\langle \rho_\varepsilon * (\tau_s \delta),\ \int_{f^{-1}((\cdot,+\infty))} \varphi \rangle &\to \langle \tau_s \delta, \int_{f^{-1}((\cdot,+\infty))} \varphi \rangle = \langle \delta,\ \tau_{-s} \int_{f^{-1}((\cdot,+\infty))} \varphi \rangle \\
&= \Big(\tau_{-s} \int_{f^{-1}((\cdot,+\infty))} \varphi \Big)(0) = \Big(\int_{f^{-1}((\cdot,+\infty))} \varphi \Big)(s) \\
&= \int_{f^{-1}((s,+\infty))} \varphi
\end{aligned}$$

に収束する。従って任意の $s\in\mathbb{R}$ 及び任意の $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対し

$$\langle f^*(\tau_s H),\ \varphi\rangle=\int_{f^{-1}((s,+\infty))}\varphi$$

が成立する。これより

$$\langle f^*(\tau_s H),\ \partial_j\varphi\rangle=\int_{f^{-1}((s,+\infty))}\partial_j\varphi$$

が導かれる。左辺は

$$-\langle\partial_j(f^*(\tau_s H)),\ \varphi\rangle=-\langle\partial_j f\cdot f^*(\tau_s\delta),\varphi\rangle$$

と書き換えられ、右辺に発散定理を用いると

$$\langle f^*(\tau_s\delta),\partial_j f\cdot\varphi\rangle=\int_{f^{-1}(\{s\})}\varphi\frac{\partial_j f}{|\nabla f|}\sigma_{f^{-1}(\{s\})}$$

が得られる。φ を $\dfrac{\partial_j f}{|\nabla f|^2}\varphi$ に置き換え j に就いて和を取ると

$$\langle f^*(\tau_s\delta),\varphi\rangle=\int_{f^{-1}(\{s\})}\varphi\frac{1}{|\nabla f|}\sigma_{f^{-1}(\{s\})}=\int_{f^{-1}(\{s\})}\varphi\omega_{f^{-1}(\{s\})}$$

が導かれる。特に $s=0$ として

$$\langle f^*\delta,\varphi\rangle=\int_{f^{-1}(\{0\})}\varphi\frac{1}{|\nabla f|}\sigma_{f^{-1}(\{0\})}=\int_{f^{-1}(\{0\})}\varphi\omega_{f^{-1}(\{0\})}$$

を得る。次に、ヘビサイド函数を経由しない等式

$$\begin{aligned}\langle f^*(\rho_\varepsilon*\tau_s\delta),\varphi\rangle&=\int_{\mathbb{R}^n}(\rho_\varepsilon*\tau_s\delta)(f(x))\varphi(x)dx\\&=-\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{f(x)}^{+\infty}(\rho_\varepsilon*\tau_s\delta)'(t)dt\Big)\varphi(x)dx\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_\varepsilon*\tau_s\delta)'(t)\Big(\int_{f^{-1}((-\infty,t))}\varphi\Big)dt\end{aligned}$$

を基礎として議論しよう。$\varphi_f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi_f(s)=\frac{d}{ds}\int_{f^{-1}((-\infty,s))}\varphi$$

で定め、上で得られた等式の極限を取ると

$$\langle f^*(\tau_s\delta),\varphi\rangle=\langle\tau_s\delta,\varphi_f\rangle=\langle\delta,\tau_{-s}\varphi_f\rangle=(\tau_{-s}\varphi_f)(0)=\varphi_f(s)$$

となる．これは $f^*(\tau_s\delta)$ の別表示である。纏めると

$$\boxed{\langle f^*(\tau_s\delta),\varphi\rangle=\int_{f^{-1}(\{s\})}\varphi\omega_{f^{-1}(\{s\})}=\frac{d}{ds}\int_{f^{-1}((-\infty,s))}\varphi}$$

となる。特に $s=0$ として次の等式を得る：

$$\boxed{\langle f^*\delta,\varphi\rangle=\int_{f^{-1}(\{0\})}\varphi\omega_{f^{-1}(\{0\})}=\varphi_f(0)}$$

是迄 f は定義域全体で沈め込みであると仮定していたが、ガウスの発散定理及び $f^*(\tau_s\delta)$ の積分表示から明らかな様に $f^{-1}(\{s\})$ 上で $\nabla f\neq 0$ であれば充分である。

3　具体例

この節では具体例に就いて検討する。

3.1　一次函数

二つの定数 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ による一次函数 $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto ax+b \in \mathbb{R}$ による $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ の引き戻し $f^*\delta$ を計算する。$a > 0$ の場合

$$f^{-1}((-\infty, s)) = \{x \in \mathbb{R};\ ax+b < s\} = \Big(-\infty, \frac{s-b}{a}\Big)$$

であるから

$$\begin{aligned}\varphi_f(s) &= \frac{d}{ds}\int_{f^{-1}((-\infty,s))}\varphi = \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{(s-b)/a}\varphi = \frac{1}{a}\varphi\Big(\frac{s-b}{a}\Big) = \frac{1}{a}\Big(\tau_{\frac{b-s}{a}}\varphi\Big)(0) \\ &= \ \langle\frac{1}{a}\delta, \tau_{\frac{b-s}{a}}\varphi\rangle(0) = \langle\frac{1}{a}\tau_{\frac{s-b}{a}}\delta, \varphi\rangle\end{aligned}$$

$a < 0$ の場合

$$f^{-1}((-\infty, s)) = \{x \in \mathbb{R};\ -|a|x+b < s\} = \Big(\frac{s-b}{|a|}, +\infty\Big)$$

であるから

$$\begin{aligned}\varphi_f(s) &= \frac{d}{ds}\int_{f^{-1}((-\infty,s))}\varphi = \frac{d}{ds}\int_{(b-s)/|a|}^{+\infty}\varphi = \frac{1}{|a|}\varphi\Big(\frac{b-s}{|a|}\Big) = \frac{1}{|a|}\varphi\Big(\frac{s-b}{a}\Big) \\ &= \ \frac{1}{|a|}\Big(\tau_{\frac{b-s}{a}}\varphi\Big)(0) = \langle\frac{1}{|a|}\tau_{\frac{s-b}{a}}\delta, \varphi\rangle\end{aligned}$$

となり、何れにしても

$$f^*(\tau_s\delta) = \frac{1}{|a|}\tau_{\frac{b-s}{a}}\varphi$$

が導かれる。特に $s = 0$ の場合

$$f^*\delta = \frac{1}{|a|}\tau_{-\frac{b}{a}}\delta$$

となる。この等式を通常

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\delta\Big(x + \frac{b}{a}\Big)$$

と表す。

3.2　二次函数

相異なる $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を根とする二次函数 $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x-\alpha)(x-\beta) \in \mathbb{R}$ による $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ の引き戻し $f^*\delta$ を計算する。$s \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x) < s \Leftrightarrow \Big(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2 < \Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2 + s$$

であるから
$$\gamma_\pm(s) := \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2 + s}$$
と置くと $s > -\Big(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2$ ならば
$$f^{-1}((-\infty, s)) = (\gamma_-(s), \gamma_+(s))$$
であり $s \le -\Big(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2$ ならば
$$f^{-1}((-\infty, s)) = \emptyset$$
となる。これより $s > -\Big(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2$ の場合
$$\begin{aligned}\varphi_f(s) &= \frac{d}{ds}\int_{f^{-1}((-\infty,s))}\varphi = \frac{d}{ds}\int_{\gamma_-(s)}^{\gamma_+(s)}\varphi = \gamma'_+(s)\varphi(\gamma_+(s)) - \gamma'_-(s)\varphi(\gamma_-(s)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^2 + s}}\Big(\varphi(\gamma_+(s)) + \varphi(\gamma_-(s))\Big)\end{aligned}$$
となるので
$$f^*(\tau_s\delta) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4s}}\Big(\tau_{\gamma_+(s)}\delta + \tau_{\gamma_-(s)}\delta\Big)$$
を得る。(α と β の中間点且つ $\gamma_+(s)$ と $\gamma_-(s)$ の中間点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ において $f'\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big) = 0$ となるが、$f^{-1}((-\infty, s))$ の境界 $\{\gamma_\pm(s)\}$ には属さない事に注意しよう。)特に $s = 0$ の場合 $\gamma_+(0) = \alpha,\ \gamma_-(0) = \beta$ となるので
$$f^*\delta = \frac{1}{|\alpha-\beta|}(\tau_\alpha\delta + \tau_\beta\delta)$$
となる。この等式を通常
$$\delta\left((x-\alpha)(x-\beta)\right) = \frac{1}{|\alpha-\beta|}\left(\delta(x-\alpha) + \delta(x-\beta)\right)$$
と表す。

3.3 多変数一次函数

$n \ge 2$ とし $k \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, c \in \mathbb{R}$ による一次函数 $f : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto k{\cdot}x{+}c \in \mathbb{R}$ による $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ の引き戻し $f^*\delta$ を計算する。$\hat{k} := k/|k|$ に対し $e_1, \cdots, e_{n-1} \in S^{n-1}$ を $(e_1, \cdots, e_{n-1}, \hat{k})$ が $\mathbb{R}^n$ の正の向きの正規直交系となる様に取る。$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ とし $\det T = 1$ なる直交変換 T を $e_1 = T\vec{e}_1, \cdots, e_{n-1} = T\vec{e}_{n-1},\ \hat{k} = T\vec{e}_n$ となる様に取る。このとき $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $y =^t Tx$ と置くと
$$k \cdot x = k \cdot Ty = ({}^tTk) \cdot y = (|k|^tT\hat{k}) \cdot y = |k|\vec{e}_n \cdot y = |k|y_n$$

であるから $s \in \mathbb{R}$ に対し

$$
\begin{aligned}
{}^tT\left(f^{-1}((-\infty, s)\right) &= {}^tT(\{x \in \mathbb{R}^n;\ k \cdot x + c < s\}) \\
&= \{y \in \mathbb{R}^n;\ |k| y_n + c < s\}
\end{aligned}
$$

となる。故に

$$
\begin{aligned}
\int_{f^{-1}((-\infty,s))} \varphi(x) dx &= \int_{{}^tT(f^{-1}((-\infty,s)))} \varphi(Ty) dy \\
&= \int_0^{\frac{s-c}{|k|}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (T^*\varphi)(y_1, \cdots, y_n)\ dy_1 \cdots dy_{n-1} \Big) dy_n
\end{aligned}
$$

が成立する。これより

$$
\begin{aligned}
\varphi_f(s) &= \frac{1}{|k|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (T^*\varphi) \Big(y_1, \cdots, y_{n-1}, \frac{s-c}{|k|} \Big) dy_1 \cdots dy_{n-1} \\
&= \frac{1}{|k|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi \Big(T(y_1 \vec{e}_1 + \cdots + y_{n-1} \vec{e}_{n-1} + \frac{s-c}{|k|} \vec{e}_n) \Big) dy_1 \cdots dy_{n-1} \\
&= \frac{1}{|k|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi \Big(y_1 e_1 + \cdots + y_{n-1} e_{n-1} + \frac{s-c}{|k|} \hat{k} \Big) dy_1 \cdots dy_{n-1}
\end{aligned}
$$

を得る。単位ベクトル $e \in S^{n-1}$ を法線とする平面は $\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
H(\lambda, e) &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ x \cdot e = \lambda\} \\
&= \{\lambda e + y \in \mathbb{R}^n;\ y \cdot e = 0\} = \{\lambda e\} + (\operatorname{Span} e)^\perp
\end{aligned}
$$

と表される。$H(\lambda, e)$ 上での積分

$$
(\mathscr{R}\varphi)(\lambda, e) := \int_{H(\lambda,e)} \varphi
$$

で与えられる変換 $\mathscr{R} : \varphi \mapsto \mathscr{R}\varphi$ を**ラドン変換** Radon transform と謂う。上の計算結果はラドン変換の記法で

$$
\varphi_f(s) = \frac{1}{|k|} \int_{H\left(\frac{s-c}{|k|}, \hat{k}\right)} \varphi = \frac{1}{|k|} (\mathscr{R}\varphi) \Big(\frac{s-c}{|k|}, \hat{k} \Big)
$$

と表されるので

$$
\langle f^*(\tau_s \delta), \varphi \rangle = \frac{1}{|k|} (\mathscr{R}\varphi) \Big(\frac{s-c}{|k|}, \hat{k} \Big)
$$

を得る。特に $k \in S^{n-1},\ c = 0$ の場合

$$
f^*(\tau_s \delta) = \mathscr{R}\big|_{(s,\hat{k})}
$$

さらに $s = 0$ の場合

$$
f^* \delta = \mathscr{R}\big|_{(0,\hat{k})}
$$

となる。

3.4 多変数二次函数

$n \geq 2$ とし $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ を根とする二次函数 $f : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto (x-\alpha)\cdot(x-\beta) \in \mathbb{R}$ による $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ の引き戻し $f^*\delta$ を計算する。

$$\begin{aligned}(x-\alpha)\cdot(x-\beta) &= |x|^2 - (\alpha+\beta)\cdot x + \alpha\cdot\beta \\ &= \left|x - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right|^2 - \frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2 + \alpha\cdot\beta \\ &= \left|x - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right|^2 - \frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2\end{aligned}$$

であるから $s > -\dfrac{1}{4}|\alpha-\beta|^2$ ならば

$$\begin{aligned}f^{-1}((-\infty, s)) &= \left\{x \in \mathbb{R}^n; \left|x - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right|^2 < \frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2 + s\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + y \in \mathbb{R}^n; |y| < \sqrt{\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2 + s}\right\}\end{aligned}$$

であり $s \leq -\dfrac{1}{4}|\alpha-\beta|^2$ ならば

$$f^{-1}((-\infty, s)) = \emptyset$$

となる。これより $s > -\dfrac{1}{4}|\alpha-\beta|^2$ の場合

$$\begin{aligned}&\varphi_f(s) = \frac{d}{ds}\int_{f^{-1}((-\infty,s))}\varphi = \frac{d}{ds}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2+s}}\left(\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+r\omega\right)d\sigma(\omega)\right)r^{n-1}dr \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2+s}}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sqrt{\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2+s}\,\omega\right)d\sigma(\omega)\left(\sqrt{\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2+s}\right)^{n-1} \\ &= 2^{1-n}(|\alpha-\beta|^2+4s)^{\frac{n}{2}-1}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sqrt{\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2+s}\,\omega\right)d\sigma(\omega)\end{aligned}$$

を得る。中心 $x \in \mathbb{R}^n$ 半径 $r > 0$ の**球面平均** spherical mean を

$$M_r[\varphi](x) := \frac{1}{\sigma_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\varphi(x+r\omega)d\sigma(\omega), \quad \sigma_{n-1} = \int_{S^{n-1}}d\sigma(\omega) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

と定めると、上の結果は

$$\langle f^*(\tau_s\delta), \varphi\rangle = 2^{1-n}\sigma_{n-1}(|\alpha-\beta|^2+4s)^{\frac{n}{2}-1}M_{\frac{1}{2}\sqrt{|\alpha-\beta|^2+4s}}[\varphi]\Big(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\Big)$$

と表される。（球の中心 $\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ に於いて $\nabla f\Big(\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\Big) = 0$ となるが $f^{-1}(\{s\})$ には属さない事に注意しよう。）特に $\alpha \neq \beta,\ s = 0$ の場合

$$f^*\delta = 2^{1-n}\sigma_{n-1}|\alpha-\beta|^{n-2}M_{\frac{1}{2}|\alpha-\beta|}[\cdot]\Big(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\Big),$$

$\alpha = \beta = 0,\ s > 0$ の場合

$$f^*(\tau_s\delta) = \frac{1}{2}\sigma_{n-1}s^{\frac{n}{2}-1}M_s[\cdot](0)$$

となる。

3.5　四次元時空に於けるローレンツ計量

四次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ を三次元空間 $\mathbb{R}^3$ と時間軸 $\mathbb{R}$ との直積空間と見做し、空間及び時間変数を夫々 $x' = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 及び $x_4 \in \mathbb{R}$ で表す事にする。双曲型二次形式としてのローレンツ計量 $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ni (x', x_4) \mapsto x_4^2 - x' \cdot x' \in \mathbb{R}$ による $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ の引き戻し $f^*\delta$ を計算する。$s \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned}
f^{-1}((-\infty, s)) &= \{(x', x_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R};\ x_4^2 < |x'|^2 + s\} \\
&= \{(x', x_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R};\ -\sqrt{|x'|^2 + s} < x_4 < \sqrt{|x'|^2 + s}\}
\end{aligned}$$

$s < 0$ の場合

$$f^{-1}((-\infty, s)) = \{(x', x_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R};\ -\sqrt{|x'|^2 + s} < x_4 < \sqrt{|x'|^2 + s}, \quad |x'|^2 > -s\}$$

となる。これより $s \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned}
\varphi_f(s) &= \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}((-\infty,s))} \varphi \\
&= \frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{-\sqrt{|x'|^2+s}}^{\sqrt{|x'|^2+s}} \varphi(x', x_4) dx_4 \right) dx' \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\left(x', \sqrt{|x'|^2 + s}\right) \frac{1}{\sqrt{|x'|^2 + s}} dx' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\left(x', -\sqrt{|x'|^2 + s}\right) \frac{1}{\sqrt{|x'|^2 + s}} dx'
\end{aligned}$$

となるので

$$\langle f^*(\tau_s \delta), \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\left(x', \sqrt{|x'|^2 + s}\right) \frac{1}{\sqrt{|x'|^2 + s}} dx' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\left(x', -\sqrt{|x'|^2 + s}\right) \frac{1}{\sqrt{|x'|^2 + s}} dx'$$

を得る。特に $s = 0$ の場合

$$\langle f^*\delta, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x', |x'|) \frac{1}{|x'|} dx' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x', -|x'|) \frac{1}{|x'|} dx'$$

となる。

参考文献：

F. G. Friedlander, “ Introduction to the Theory of Distributions, ” Cambridge Univ. Press

J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, “ Distributions,” Birkhäuser

J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, “ Multidimentional Real Analysis,”
Cambridge Univ. Press

小澤徹, ユークリッド空間の部分多様体
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/submanifold.pdf

高橋陽一郎,『実函数とフーリエ解析』, 岩波書店